



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

Corso di laurea in Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

ANALISI DI STRUTTURE RETICOLARI SPAZIALI STATICAMENTE DETERMINATE SECONDO IL METODO HENNEBERG

Tesi di laurea

Relatore:

Prof. Ing. Paolo S. VALVO

Laureando:

Enrico MARRA

INDICE

INDICE	2
1. INTRODUZIONE	3
2. LE STRUTTURE RETICOLARI IN INGEGNERIA ED ARCHITETTURA	6
2.1 Le strutture reticolari	7
2.2 Le cupole geodetiche	8
2.3 Esempi di cupole geodetiche e altre strutture reticolari spaziali	11
2.4 Costruzioni in acciaio e caratteristiche del materiale	14
2.5 Legno lamellare	15
3. ANALISI DELLE STRUTTURE RETICOLARI SPAZIALI	17
3.1 La decomposizione delle forze nello spazio	17
3.2 Corpi vincolati al suolo e strutture semplici	17
3.3 Strutture semplici	17
3.4 Strutture composte	20
4. APPLICAZIONE DEL METODO DI HENNEBERG ALL'ANALISI DI UNA CUPOLA RETICOLARE CON PARALLELI PENTAGONALI	24
BIBLIOGRAFIA	38

1. INTRODUZIONE

Le strutture reticolari sono costituite da un complesso di travi, solitamente rettilinee, vincolate alle estremità da vincoli di tipo cerniera. Nel caso delle strutture reticolari, le travi che le compongono sono chiamate anche “aste”, mentre i vincoli di estremità sono detti “nodi”.

In generale, si definisce trave un solido generato da una figura piana il cui baricentro si sposta seguendo una curva spaziale detta linea d’asse. Spesso si ha a che fare con travi piane (quando linea d’asse, i vincoli e i carichi sono contenuta in un piano). Allo stesso modo, si distinguono le strutture reticolari piane e quelle spaziali.

Le travi reticolari vengono chiamate così poiché la loro morfologia viene assimilata a quella delle reti di funi. Con l’avvento della Rivoluzione Industriale avviene un passaggio piuttosto rapido dalla tecnologia tradizionale del legno a quella del ferro, materiale che si è reso disponibile sotto forma di profilati in grande quantità e costi relativamente bassi. Contemporaneamente si sviluppano i metodi di calcolo delle travature reticolari. L’interazione di queste due circostanze ha permesso la trasformazione della teoria e tecnica delle strutture reticolari che oggi conosciamo.

Le aste che costituiscono una travatura reticolare sono soggette solo a sforzo normale: tiranti le aste tese, puntoni quelle compresse. Lo schema statico è rappresentato da un corrente superiore e un corrente inferiore e da elementi verticali chiamati montanti e diagonali che rappresentano i collegamenti nei nodi. Vediamo dei semplici di travi reticolari piane schemi in figura 1.

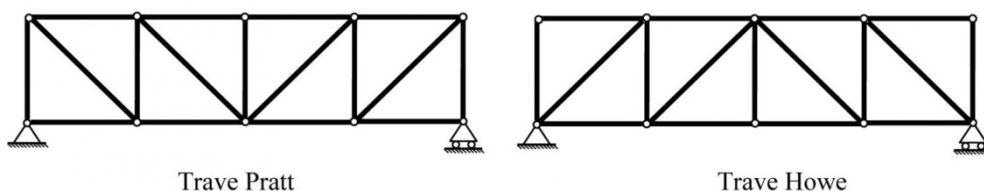


Figura 1 - Schemi statici di travi reticolari piane

Nel caso delle travature reticolari piane esistono principalmente due metodi di calcolo:

- Metodo dei nodi, o di Cremona, tale metodo si basa sulla ricerca di un nodo canonico dove convergano due aste e una forza nota;
- Metodo di Ritter, dove la ricerca degli sforzi nelle aste di una travatura reticolare può essere condotta in maniera analoga a quella usata per la ricerca delle caratteristiche della sollecitazione nelle travi massicce. Considerando una travatura staticamente determinata viene fatta una sezione e calcolato lo sforzo nelle aste interessate della sezione senza dover necessariamente calcolare gli sforzi nelle altre aste.

Partendo dalle nozioni base delle travature reticolari piane, sono state studiate le strutture reticolari che si generano nello spazio.

Esempi di strutture reticolari nello spazio s'incontrano ad esempio in vari tipi di ponti e cupole. Anche in questo caso, se i carichi agiscono solo nei nodi, allora le varie aste risultano soltanto tese o compresse, essendo soggette solo a sforzo normale.

Lo studio di queste strutture, ossia il calcolo degli sforzi nelle aste, non differisce sostanzialmente da quello delle strutture reticolari piane, poiché di solito si utilizza la condizione che ogni nodo sia in equilibrio, oppure la condizione di equilibrio di una parte sezionata della struttura.

Quindi, nel caso di strutture staticamente determinate, avendo una sola incognita il calcolo si riduce alla decomposizione di una o più forze note in altre forze incognite delle quali sono date le rette d'azione, coincidenti con gli assi di determinate aste.

In questa tesi viene analizzato il caso di travature reticolari spaziali che, pur essendo staticamente determinate, non presentano nodi in cui convergano tre sole aste e una forza nota. In particolare, presentiamo nel capitolo 3 il metodo Henneberg, che consente il calcolo di strutture reticolari dove in tutti i nodi convergono 4 aste. Come applicazione di tale metodo condurremo l'analisi di una cupola reticolare a paralleli pentagonali.

La geometria delle cupole reticolari si basa spesso su solidi platonici. Tali strutture traggono la loro resistenza intrinseca dalle maglie triangolari costituenti tali strutture come si può vedere nella figura 2.

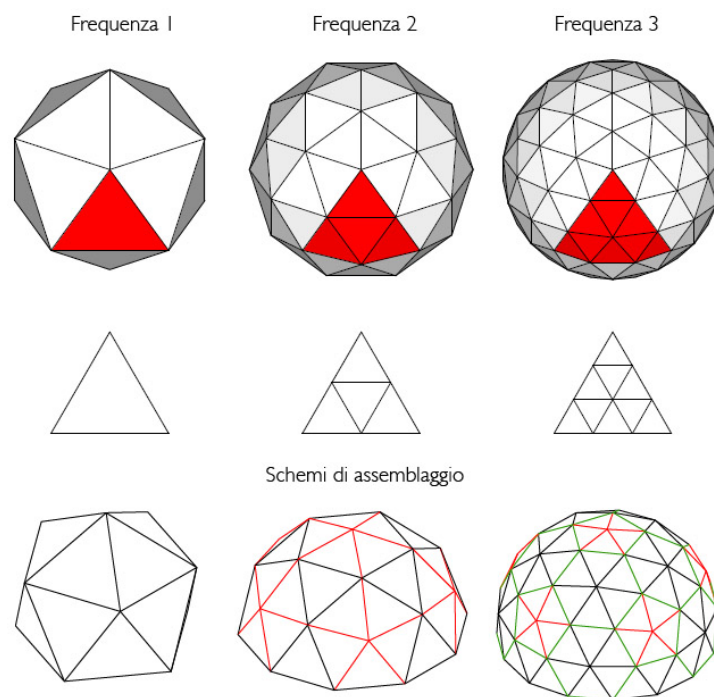


Figura 2 - Schemi di cupole reticolari spaziali formate da assemblaggi di maglie triangolari

2. LE STRUTTURE RETICOLARI IN INGEGNERIA ED ARCHITETTURA

Le strutture reticolari furono sviluppate indipendentemente da Alexander Graham Bell nel 1900 e da Buckminster Fuller nel 1950. L'interesse di Bell era quello di progettare telai rigidi per l'ingegneria nautica e aeronautica, gli interessi di Fuller furono quelli di usare questi telai nel campo dell'ingegneria e dell'architettura con particolare riguardo all'edificazioni di coperture e capannoni industriali.

La struttura reticolare spaziale è un tipo molto speciale di struttura, che può essere metallica o di legno lamellare, e si differenzia dalla classica carpenteria per via del suo comportamento tridimensionale. In particolare, le travature reticolari spaziali sono costituite tipicamente da correnti superiori e correnti inferiori, sfalsati nello spazio e da un insieme di montanti e diagonali che ne collegano i reciproci nodi. Ciò porta ad avere pesi molto ridotti se paragonati a quelli delle strutture metalliche convenzionali.

La maggior parte delle strutture reticolari di acciaio sono formate da nodi sferici e aste tubolari (munite di appositi terminali di connessione). È possibile infatti realizzare strutture (anche coperture) di qualsiasi forma e luce.

La struttura tridimensionale reticolare o *Space Frame*, che si ottiene per "connessione di nodi di giuntura con aste ad estremità a vite singola", si rivela per molte ragioni il più adeguato fra i vari sistemi costruttivi esistenti per lo sviluppo di strutture portanti di copertura in quanto consente:

- una produzione altamente standardizzata e di qualità interamente prefabbricata in officina;
- di sviluppare sistemi reticolari molto vicini agli schemi teorici e riduzione degli effetti parassiti;
- una elevata precisione in cantiere, grazie alle ridottissime tolleranze di fabbricazione.

2.1 Le strutture reticolari

Vediamo alcuni esempi di strutture reticolari spaziali come ponti, gru o tralicci.

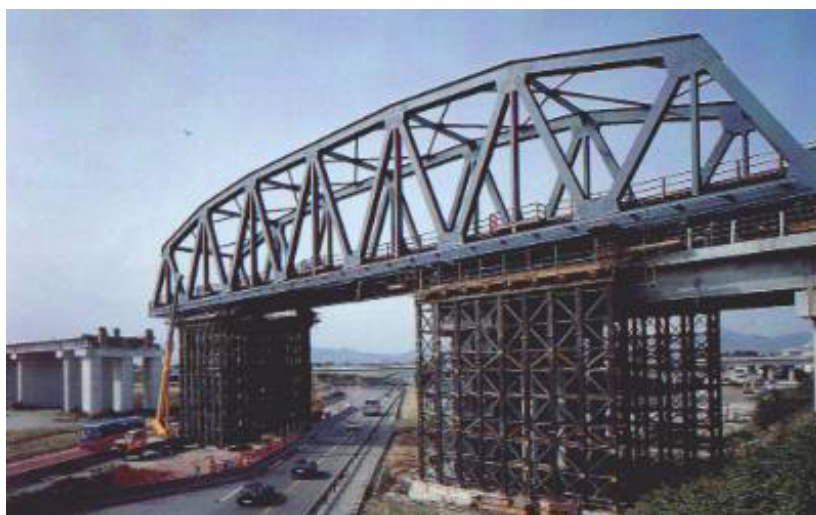


Figura 3 - Ponte ferroviario realizzato con una struttura reticolare



Figura 4 -Tralicci reticolari per distribuzione dell'energia elettrica

2.2 Le cupole geodetiche

Esistono diverse tipologie di cupole reticolari, ad esempio le cupole Schwedler, che prendono il nome dall'ingegnere civile Johann Wilhelm Schwedler, il quale è stato uno dei primi alla fine dell'800 a calcolare strutture reticolari spaziali. Esse coprono vani il cui contorno è un poligono spesso regolare formato da meridiani impostati nei vertici del poligono di base; sono formate inoltre da aste disposte secondo paralleli e aste disposte secondo una delle diagonali come ben si può vedere in figura 5 caso a) e disposte anche secondo entrambe le diagonali caso b).

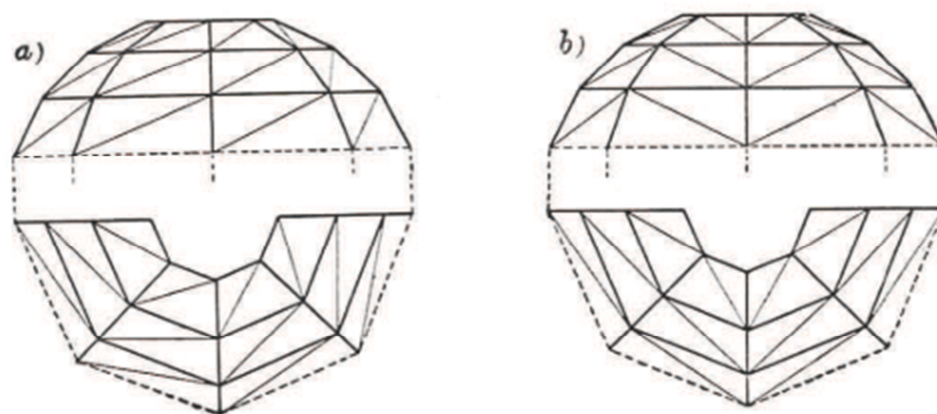


Figura 5. Cupole a rete

Poi ci sono le cupole geodetiche che sono note per essere una delle soluzioni architettoniche più usate nell'ambito delle strutture reticolari. La cupola geodetica progettata per la prima volta, come detto prima dal celebre architetto Richard Buckminster Fuller, fu costruita nel 1948 e brevettata nel 1954.

Fuller prese in prestito la forma dei cristalli per realizzare una struttura in cui gli sforzi di compressione sono scaricati su elementi in tensione e la assembla come un complesso di tetraedri regolari, ribaltando così il concetto fondamentale dell'architettura e dimostrando che la cupola geodetica è l'unica struttura costruita dall'uomo che diventa proporzionalmente più resistente all'aumentare delle sue dimensioni.

Il progetto di una cupola è molto complesso poiché non esistono progetti standard delle cupole ma ogni cupola deve essere progettata in relazione alle dimensioni e ai materiali.

I criteri di progettazione sui solidi platonici, come l'icosaedro, si basano sulla proiezione delle facce del solido sulla superficie della sfera che lo circoscrive.



Figura 6 - Icosaedro

Prima di essere proiettate le facce triangolari dell'icosaedro vengono suddivise n° volte, questa divisione determina la frequenza e viene indicata con la lettera V.

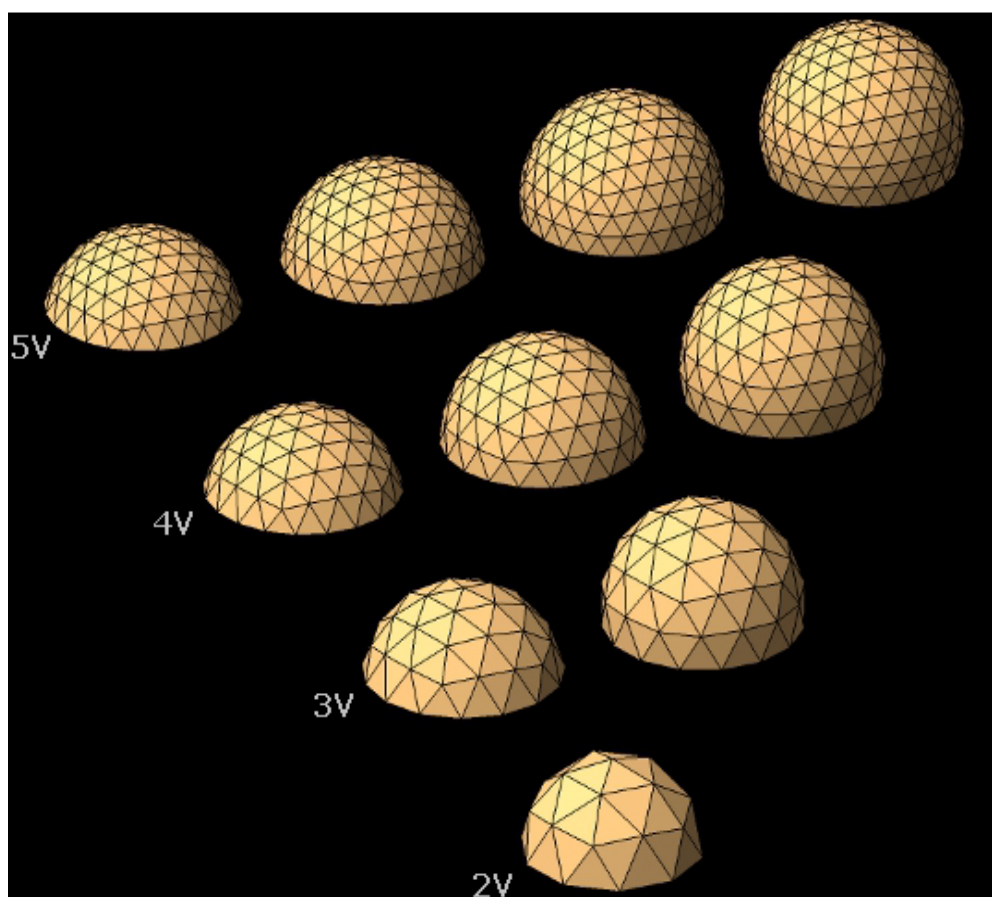


Figura 7 - Esempi della frequenza di facce triangolari sulla parte sferica di una cupola.

2.3 Esempi di cupole geodetiche e altre strutture reticolari spaziali

All'Expo di Montreal fu presentata la cupola geodetica a frequenza 16 V $\frac{3}{4}$ di sfera con un diametro di 76 metri denominata “ *Biosphere, Environment Museum*”.

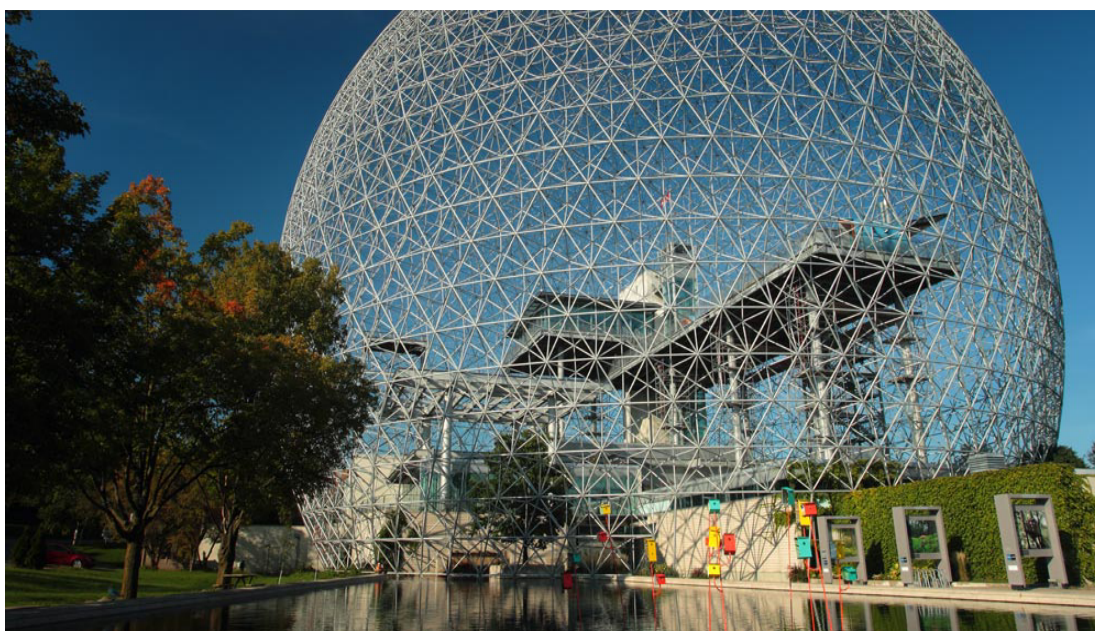


Figura 8. La spettacolare biosfera localizzata al Parc Jean Drapeau di Montreal in Canada.

I primi modelli furono sperimentati dall'esercito americano che sfruttando la stabilità della struttura costruì delle cupole prefabbricate trasportabili da elicotteri.

Il **Progetto Eden** inaugurato nel 2001 nel Regno Unito ha lo scopo di promuovere la comprensione e la gestione responsabile della relazione vitale tra l'uomo e la natura, e quindi uno sviluppo sostenibile. La particolarità del progetto è quella di spiegare come funzionano i vari ecosistemi del pianeta riprodotti in grandi serre che ospitano un vasto numero di piante tropicali e mediterranee. Ci sono voluti 2 anni e mezzo per costruirlo e un costo di 130 milioni di Sterline. La struttura geodetica è costituita da tubolari in acciaio a forma esagonale affiancati tra loro e pesa solo poco più dell'aria che contiene, merito della copertura formata da cuscini in ETFE (etilene tetrafluoroetilene) cioè un fluoropolimero termoplastico che è molto resistente all'erosione, pesa l'1% rispetto al vetro, trasmette più luce ed è anche resistente, autopulente e riciclabile. Inoltre resiste al fuoco, vento e acqua.



Figura 9 - Progetto Eden (European Destinations of Excellence), Cornovaglia, Regno Unito, la cupola più grande alta 240m è considerata la più grande al mondo secondo il sito web dell'Istituto Buckminster Fuller.



Figura 10 - Particolare costruttivo della cupola geodetica a Paestum (SA) in occasione della Borsa Mediterranea del Turismo nell'edizione del 2014.



Figura 11 - Costruzione di una cupola geodetica nell'area archeologica di Paestum (SA) in occasione della Borsa Mediterranea del Turismo nell' edizione del 2014.



Figura 12 - Vista dall'alto della costruzione delle cupole geodetiche nell' area archeologica di Paestum (SA) in occasione della Borsa Mediterranea del Turismo nell'edizione del 2014.

2.4 Costruzioni in acciaio e caratteristiche del materiale

La stragrande maggioranza delle costruzioni civili basate su sistemi reticolari prevede l'utilizzo di acciai, leghe Fe-C profilabili a caldo, contenenti anche diversi elementi che possono essere conseguenza del processo di produzione oppure possono essere aggiunti deliberatamente per influenzare le caratteristiche di impiego.

Si noti che la presenza di carbonio influenza la formazione di profilati e l'attitudine di un materiale a deformarsi plasticamente; infatti tali caratteristiche diminuiscono all'aumentare del tenore di carbonio. Il carbonio è presente tra lo 0,1% e lo 0,3% poiché valori troppo alti renderebbero l'acciaio troppo fragile mentre valori troppo bassi lo renderebbero meno resistente.

Tutti gli elementi strutturali di acciaio (piastre coprigiunto, bicchieri, etc.) possono essere protetti nei confronti della corrosione mediante: zincatura speciale, applicata in appositi stabilimenti, la quale consente una protezione alla corrosione duratura nel tempo e conferisce agli elementi metallici un elevato grado di finitura.

Per strutture più particolari, come le cupole geodetiche, i sistemi costruttivi prevedono una protezione dell'acciaio mediante:

- **Zincatura:** questo procedimento, (metodo Sendzimir), di zincatura consiste in un trattamento che prevede il passaggio della lamiera in un bagno di zinco fuso a 700° contenuto in una vasca ceramica; a questo bagno vengono aggiunti, solitamente, piombo come elemento fluidificante ed alluminio per favorire l'aderenza dello zinco all'acciaio.

Prima del passaggio nello zinco la lamiera viene sottoposta ad un trattamento di sgrassatura per l'eliminazione delle impurità superficiali e successivamente decapata in acido cloridrico per l'eliminazione dei degli ossidi di ferro.

La normative UNI EN 10042 e UNI EN 10147 elencano i vari tipi di acciaio zincati a caldo in continuo ottenuti con questo processo indicando le caratteristiche meccaniche e i vari spessori di rivestimento ottenibili.

- **Zincatura metodo elettrolitica:** Innanzitutto il materiale da trattare viene adeguatamente preparato (pre-sgrassato, decapato e sgrassato). Subito dopo il materiale è immerso in una soluzione contenente sali di zinco. Viene infine creato

un passaggio di corrente tra il pezzo e la soluzione che fa depositare lo zinco metallico sulla superficie del pezzo stesso. Tutti i punti di saldatura verranno protetti con zincatura speciale a freddo.

2.5 Legno lamellare

Il legno lamellare viene realizzato con materie prime quali il legno e la colla; il prodotto che ne risulta si differenzia dal legno tradizionale, non tanto per le proprietà meccaniche in senso stretto, quanto per la sua potenzialità in relazione alle strutture realizzabili.

È proprio per questa differente potenzialità di uso che il legno lamellare si colloca come materiale con caratteristiche innovative per quanto riguarda l'edilizia. Come è noto, l'impiego del legno massiccio tradizionale nell'edilizia comporta aspetti positivi quali:

- la leggerezza;
- facilità di impiego e montaggio;
- lavorabilità;
- economicità in relazione al trasporto, ai mezzi di sollevamento per il montaggio e all'incidenza sui costi per le opere fondazionali;
- estetica ed affidabilità.

Allo stesso tempo, bisogna considerare alcuni aspetti negativi come:

- minore affidabilità per l'incertezza nella determinazione delle condizioni del materiale (nodi, zone fessurate) e della sua variabilità nel tempo.

Il legno lamellare elimina quindi tutti questi aspetti negativi con il controllo di nodi e zone fessurate, facendo delle prove di resistenza su provini tratti da elementi prefabbricati. Quindi il legno lamellare esalta le caratteristiche del legno massiccio come materiale edile, viene ottenuto attraverso un processo di incollaggio permettendo di realizzare elementi di qualsiasi sezione o lunghezza trovando la sua massima espressione per edifici come palazzetti dello sport, coperture, etc.



Figura 13 - Travatura reticolare in legno lamellare

3. ANALISI DELLE STRUTTURE RETICOLARI SPAZIALI

3.1 La decomposizione delle forze nello spazio

La ricerca degli sforzi nelle aste in una struttura reticolare tridimensionale si basa sulla decomposizione di una forza nota in tre, delle quali sono date le rette d'azione, concorrenti in un punto della forza nota. Il metodo più semplice è quello delle componenti in cui la forza data P secondo gli assi x, y, z arbitrari avrà come componenti rispettivamente $P \cos \alpha, P \cos \beta, P \cos \gamma$; analogo discorso vale per le forze incognite in un nodo. La grandezza R risultante di forze agenti nello spazio F_x, F_y, F_z è pari a $R = (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{1/2}$ dove $\cos \alpha = F_x / R, \cos \beta = F_y / R, \cos \gamma = F_z / R$. Il problema della decomposizione di una forza P in 3 componenti, delle quali sono date le rette d'azione è generalmente possibile e determinato, poiché si dispone di 3 equazioni di equilibrio. Occorre che però le 4 rette date di P, F_x, F_y, F_z siano tali che 3 di esse non siano in uno stesso piano.

3.2 Corpi vincolati al suolo

Per vincolare completamente nello spazio un corpo o una struttura indeformabile, bisogna impedire ogni sua possibilità di movimento oppure vincolarlo in modo che esso possa muoversi in direzione contenuta nel piano tangente ma non in direzione della normale. In pratica bisogna vincolare il corpo alla sua superficie, ciò si può fare anche collegando le aste con delle cerniere sferiche alle estremità. Quindi le aste colleganti i punti del corpo con dei punti fissi devono essere almeno 6 per impedire qualsiasi movimento del corpo nello spazio. Le aste in numero minor di 6 permettono un movimento al corpo, le aste in numero maggiore di 6 sono sovrabbondanti.

3.3 Strutture semplici

Per generare le strutture reticolari nello spazio bisogna fare delle distinzioni, sia delle aste che sono vincolate internamente che costituiscono un corpo libero nello spazio indeformabile e le aste che costituiscono un corpo vincolato sia internamente sia esternamente.

Iniziando dal secondo caso come si può vedere nella figura 14 a) il punto D si fissa poiché A,B,C non sono complanari, se lo fossero permetterebbero un movimento normale alla superficie, figura 14 b), in contrasto con quanto detto prima.



Figura 14

Poi possiamo ricavare anche altri punti, esempio in figura 15, sempre da aste complanari; ad esempio E viene ricavato da due aste non complanari che fanno capo al suolo, ad esempio C ed F, e la terza asta fa capo al nodo D già fissata. E così via ogni punto nuovo viene collegato a 3 aste non complanari, con 3 punti già fissati.

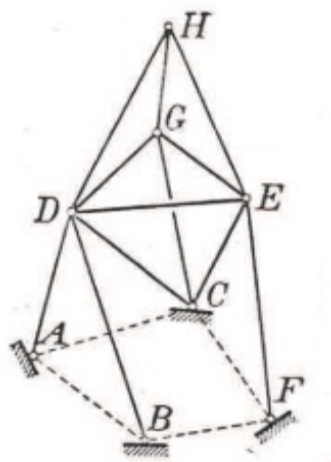


Figura 15

Quindi la relazione che intercorre tra il numero a di aste e il numero n di nodi è $a = 3n$. Nel caso della struttura di fig. 7 si ha $n = 4$, $a = 3 \times 4 = 12$.

Quando si applicano degli sforzi esterni S il problema è staticamente determinato perché per ogni nodi abbiamo $3n$ aste e $3n$ equazioni di equilibrio. Se il numero di aste è minore di $3n$, la struttura è labile, se maggiore di $3n$ la struttura è ad aste sovrabbondanti e il problema è staticamente indeterminato.

Ora vediamo come si possono generare strutture indeformabili libere nello spazio, ovvero senza essere vincolate al suolo. Partendo da un semplice triangolo ABC (figura 16), il vertice D viene collegato ai 3 nodi ABC mediante aste non complanari. Il numero delle aste aggiunte è il triplo rispetto al numero delle aste del triangolo primitivo. Però le aste sono 3 nel triangolo primitivo, il numero delle aste è $a = 3n - 6$.

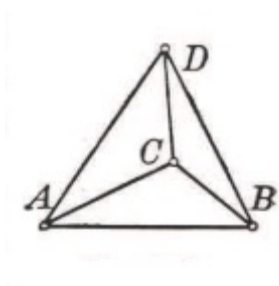


Figura 16

Nel tetraedro la piramide di base risulterebbe labile (figura 17) poiché i vertici del quadrilatero possono abbassarsi o alzarsi. La struttura diventa indeformabile aggiungendo un'asta in una delle due diagonali del quadrilatero.

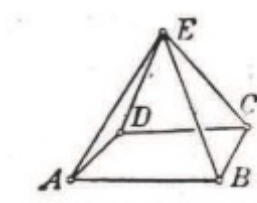


Figura 17

Se poi la struttura si collega col suolo mediante sei vincoli avremo $3n - 6$ sforzi incogniti nelle aste e 6 reazioni vincolari incognite per un totale di $3n$ incognite. Il problema è staticamente determinato avendo $3n$ equazioni di equilibrio di ciascun nodo. Quindi nel calcolo delle strutture semplici ci sarà sempre almeno un nodo dove concorrano 3 aste dove gli sforzi si trovano decomponendo in 3 la forza nota agente in quel nodo. Poi si passa ad un nodo successive dove concorrano 4 aste ma lo sforzo in una di queste è noto quindi così si procede come detto prima con le forze note decomposte in 3 aste detto. Vale lo stesso per le strutture libere dove le forze esterne devono essere equilibrate tra loro.

3.4 Strutture composte

Le strutture composte nascono dal collegamento mediante aste di due strutture semplici, dove per impedire un movimento relativo tra le due strutture parziali occorrono 6 aste per vincolarle tra loro, e le 6 aste non devono avere nessuna retta d'azione che le incontri tutte e 6. La figura 18 rappresenta il caso di due strutture a forma di tetraedro collegate dalle aste 1,2,3,4,5,6.

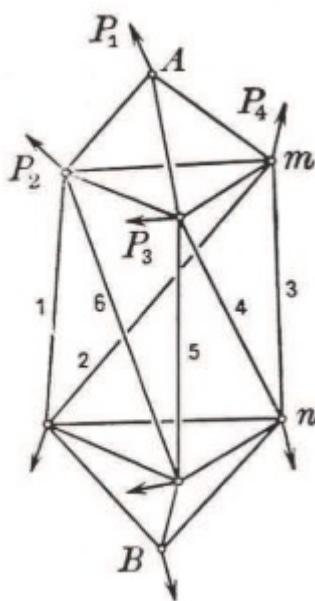


Figura 18 - Tetraedro collegato mediante le aste 1,2,3,4,5,6.

Per le strutture composte, come nel caso delle strutture semplici libere nello spazio, vale la relazione $a = 3n - 6$. Ovviamente avremo il problema che in un nodo concorrono più di 3 aste, non consentendo il calcolo mediante l'equilibrio dei nodi, ad esempio analizzando la figura 18 potremmo pensare di iniziare dal nodo A o nodo B ma successivamente ci accorgeremo che ovunque si avranno 4 incognite.

Si elimina tale inconveniente calcolando gli sforzi in uno dei sei elementi colleganti le due strutture semplici, con una sezione analoga al metodo della sezione di Ritter ovviamente sezionando in modo che non si taglino contemporaneamente tutte le 6 aste.

Un metodo alternativo, considerando la figura 18 nell'ipotesi che le aste 1, 3, 5 siano concorrenti in un punto, potrebbe essere quello di analizzare la retta mn e vedere le aste che confluiscono nella retta, trovare una sezione che tagli le sei aste 1,2,3,4,5,6 e calcolare lo sforzo dell'asta 6 mediante l'equilibrio alla rotazione rispetto alla retta mn in

questa equazione figureranno lo sforzo incognite S_6 e le forze P_1, P_2, P_3 (perché P_4 e gli altri cinque sforzi incogniti, incontrando la retta mn hanno momenti nulli).

Possono esserci anche delle strutture denominate complesse poiché non nascono da successivi tetraedri o da collegamenti di 2 strutture semplici ma che possono ricondursi a tali. Come nella figura 19 dove nel caso a) la struttura è semplice, potendosi ottenere dal triangolo ABC per l'aggiunta successiva dei nodi D, E, F e di tre aste per ciascuno. Orbene, da essa si ottiene l'ottaedro del caso b) sostituendo l'asta BC con l'asta CF. Quindi l'ottaedro è una struttura complessa.

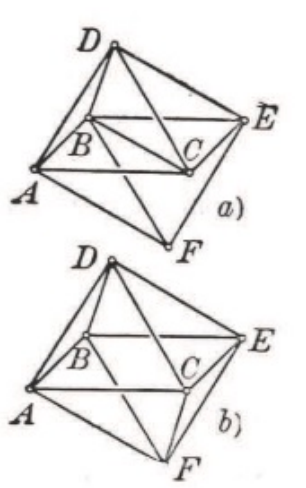


Figura 19

Un altro esempio è quello della figura 20 dove nel caso a) la struttura è semplice aggiungendo successivamente i nodi A,B,C,D,E,F. Da essa si ottiene la struttura complessa, caso b), sostituendo l'asta AF_1 con l'asta FA_1 .

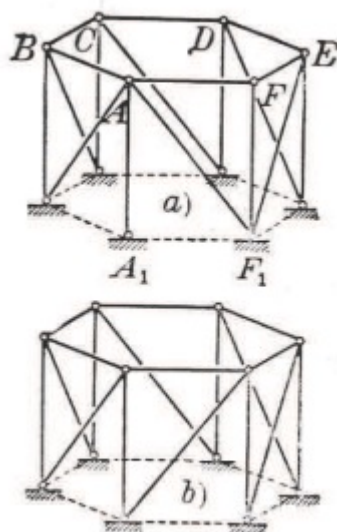


Figura 20

Nell'eseguire la sostituzione bisogna vedere se le aste risultano sovrabbondanti in un nodo e magari insufficienti in un altro ad esempio se in a) si sopprimesse l'asta AF_1 e si aggiungesse una fra B e A_1 . Per quanto concerne le strutture indeformabili libere nello spazio la relazione il numero medio delle aste concorrenti in ogni nodo si ottiene raddoppiando il numero a delle aste (perché l'asta ha due estremità) e dividendo per il numero n di nodi; per cui tenendo conto della relazione già vista precedentemente per strutture semplici, $a = 3n - 6$, otterremo che il numero medio delle aste risulterà $2a/n = 6 - 12/n$. Se $n = 5$ tale numero risulta pari a 3,6 cioè ci sarà almeno un nodo dove concorrerebbero 3 aste; se $n = 4$ risulta che in tutti i nodi concorrono 3 aste, invece per $n = 6$ tale numero sarà pari a $6 - 12/6 = 4$ quindi come nel caso della figura 20 b) non esiste nessun nodo dove concorrono 3 sole aste. Invece nelle strutture vincolate al suolo già per $n = 3$ è possibile che non esistano nodi dove concorrano tre sole aste come nel caso della figura 21.

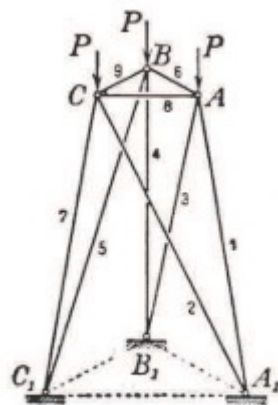


Figura 21

Per calcolare gli sforzi dove non c'è nessun nodo nel quale concorrano 3 sole aste viene usato il metodo di Henneberg. Tale metodo consiste nel sopprimere un'asta in modo che in quel nodo concorrano 3 sole aste e viene applicato lo sforzo incognito X a entrambi i nodi ai quali essa faceva capo; l'asta soppressa viene sostituita con un'asta fittizia messa in modo che le aste siano in numero adeguato per la non deformabilità della struttura. Lo sforzo di un'asta qualsiasi sarà: $S = S_0 + S_1 X$ dove S_0 è dovuto alle forze esterne P e S_1 dell'incognita $X = 1$. Ovviamente nell'asta fittizia deve risultare $S = 0$. Nel caso della figura 20 a) si sopprime l'asta AF_1 e viene sostituita con l'asta fittizia A_1F della figura 20 b).

Nel capitolo seguente vedremo come applicare tale metodo al caso di una cupola geodetica composta a base pentagonale vincolata al suolo.

4. APPLICAZIONE DEL METODO DI HENNEBERG ALL'ANALISI DI UNA CUPOLA RETICOLARE CON PARALLELI PENTAGONALI

Calcoliamo gli sforzi nelle aste di una cupola a rete con paralleli pentagonali soggetti, ai nodi del livello 2 ovvero A,B,C,D,E, ad una forza P pari a 200 N.

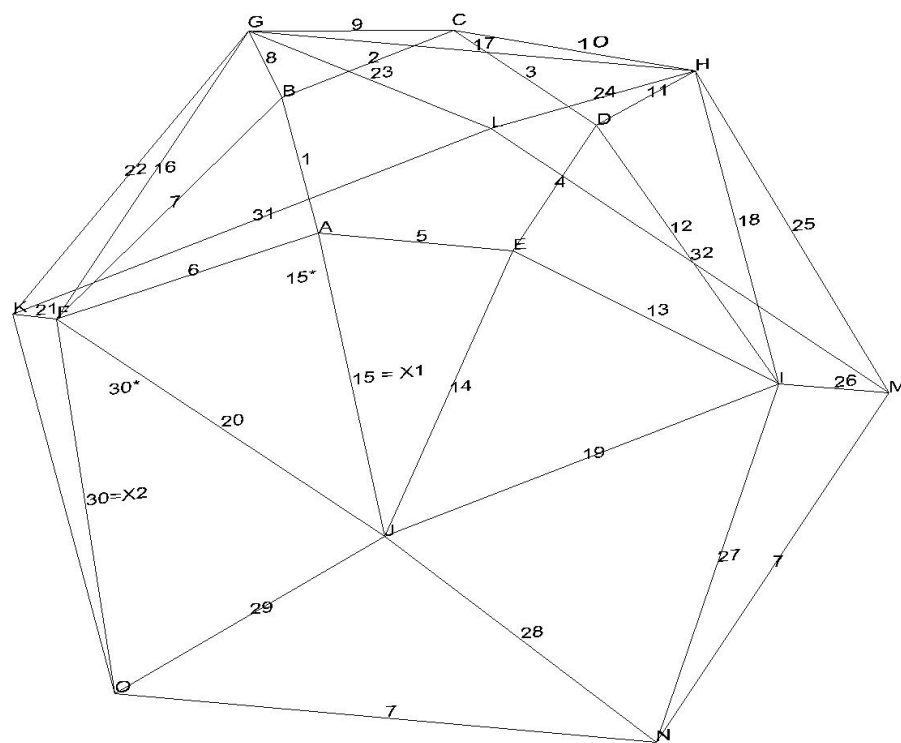


Figura 22 - Cupola reticolare con paralleli pentagonali.

Seguendo il metodo di Henneberg abbiamo scelto di sopprimere l'asta AJ sostituendola con gli sforzi X1 applicati ai nodi A e J dell'asta. Per ripristinare il numero di aste poniamo un'asta fittizia FE che chiameremo 15*. Iniziamo a calcolare i valori delle aste del secondo livello 2 partendo dal nodo A dove convergono 3 aste (1,6,5) e 2 forze note: P, diretto secondo l'asse negativo delle z, e lo sforzo X1 dell'asta 15 che convenzionalmente sul programma di calcolo Excel abbiamo dato il valore di 100 N

all'inizio per poi calcolarci le altre aste confluenti nei nodi B,C,D,E fino a completare il giro trovando il valore dell'asta fittizia. Con la funzione di Excel "Ricerca obiettivo", abbiamo trovato il valore vero dell'asta 15 AJ dando il valore nullo all'asta fittizia e così anche gli sforzi delle altre aste che erano in funzione anche dell'asta 15 AJ.

Riportiamo i valori trovati delle coordinate dei nodi A,B,C,D,E.

Livello	Nodo	X	Y	Z	PX	PY	PZ
2	A	-0,8713	-0,6331	2,8000	0,00	0,00	-200,00
2	B	-0,8713	0,6331	2,8000	0,00	0,00	-200,00
2	C	0,3328	1,0243	2,8000	0,00	0,00	-200,00
2	D	1,0770	0,0000	2,8000	0,00	0,00	-200,00
2	E	0,3328	-1,0243	2,8000	0,00	0,00	-200,00
1	F	-2,4730	0,0000	1,6984	0,00	0,00	0,00
1	G	-0,7642	2,3519	1,6984	0,00	0,00	0,00
1	H	2,0007	1,4536	1,6984	0,00	0,00	0,00
1	I	2,0007	-1,4536	1,6984	0,00	0,00	0,00
1	J	-0,7642	-2,3519	1,6984	0,00	0,00	0,00

E poi in seguito i valori dei A,B,C,D,E.

NODO A					COSENI DIRETTORI			
Asta	Nodi	Δx	Δy	Δz	Lunghezza	αx	αy	αz
1	AB	0,0000	1,2662	0,0000	1,2662	0,0000	1,0000	0,0000
5	AE	1,2041	-0,3912	0,0000	1,2661	0,9511	-0,3090	0,0000
6	AF	-1,6017	0,6331	-1,1016	2,0445	-0,7834	0,3097	-0,5388
15	AJ	0,1071	-1,7188	-1,1016	2,0443	0,0524	-0,8408	-0,5389

FORZE			N15			
PESO	200	X1	-185,5846	NODO A (vettore termini noti)		
αx	0	αx	0,0524	9,7226		
αy	0	αy	-0,8408	-156,0333		
αz	-1	αz	-0,5389	99,9964		
	N1:	9,7225748	0,9510648	-0,783438		
		-156,0333	-0,308991	0,3096674		
		99,996374	0	-0,538824	DET_NUM	-73,09793
					Det_den	0,5124568
					N1:	-142,6421
	N5:	0	9,7225748	-0,783438		
		1	-156,0333	0,3096674		
		0	99,996374	-0,538824	DET_NUM	-73,10216
					Det_den	0,5124568
					N5:	-142,6504
	N6:	0	0,9510648	9,7225748		
		1	-0,308991	-156,0333		
		0	0	99,996374	DET_NUM	-95,10303
					Det_den	0,5124568
					N6:	-185,5825

NODO B					COSENI DIRETTORI			
Asta	Nodi	Δx	Δy	Δz	Lunghezza	αx	αy	αz
2	BC	1,2041	0,3912	0,0000	1,2661	0,951065	0,308991	0
7	BF	-1,6017	-0,6331	-1,1016	2,0445	-0,78344	-0,30967	-0,53882
8	BG	0,1071	1,7188	-1,1016	2,0443	0,052389	0,840766	-0,53886
1	BA	0,0000	-1,2662	0,0000	1,2662	0	-1	0

PESO	200	N1	-142,6421	NODO B (vettore termini noti)				
αx	0	αx	0	0				
αy	0	αy	-1	-142,6421				
αz	-1	αz	0	200				
	N2:	0	-0,783438	0,0523889				
		-142,6421	-0,309667	0,8407663				
		200	-0,538824	-0,538857	DET_NUM	-64,24843		
					Det_den	0,4503909		
					N2:	-142,6504		
	N7:	0,9510648	0	0,0523889				
		0,3089914	-142,6421	0,8407663				
		0	200	-0,538857	DET_NUM	-83,58468		
					Det_den	0,4503909		
					N7:	-185,5825		
	N8:	0,9510648	-0,783438	0				
		0,3089914	-0,309667	-142,6421				
		0	-0,538824	200	DET_NUM	-83,5856		
					Det_den	0,4503909		
					N8:	-185,5846		

NODO C						COSENI DIRETTORI		
Asta	Nodi	Δx	Δy	Δz	Lunghezza	αx	αy	αz
3	CD	0,7442	-1,0243	0,0000	1,2661	0,587787	-0,80902	0
9	CG	-1,0970	1,3276	-1,1016	2,0444	-0,5366	0,649393	-0,53885
10	CH	1,6679	0,4293	-1,1016	2,0444	0,815825	0,209985	-0,53883
2	CB	-1,2041	-0,3912	0,0000	1,2661	-0,95106	-0,30899	0

PESO	200	N2	-142,6504	Nodo C (vettore termini noti)				
αx	0	αx	-0,951065	-135,6698				
αy	0	αy	-0,308991	-44,07774				
αz	-1	αz	0	200				
	N3:	-135,6698	-0,536595	0,8158247				
		-44,07774	0,6493929	0,2099847				
		200	-0,538845	-0,538829	DET_NUM	-64,25098		
					Det_den	0,4503938		
					N3:	-142,6551		
	N9:	0,5877865	-135,6698	0,8158247				
		-0,809016	-44,07774	0,2099847				
		0	200	-0,538829	DET_NUM	-83,58685		
					Det_den	0,4503938		
					N9:	-185,5861		
	N10:	0,5877865	-0,536595	-135,6698				
		-0,809016	0,6493929	-44,07774				
		0	-0,538845	200	DET_NUM	-83,58568		
					Det_den	0,4503938		
					N10:	-185,5836		

NODO D		COSENI DIRETTORI						
Asta	Nodi	Δx	Δy	Δz	Lunghezza	αx	αy	αz
4	DE	-0,7442	-1,0243	0,0000	1,2661	-0,58779	-0,80902	0
11	DH	0,9237	1,4536	-1,1016	2,0444	0,451813	0,711005	-0,53883
12	DI	0,9237	-1,4536	-1,1016	2,0444	0,451813	-0,711	-0,53883
3	DC	-0,7442	1,0243	0,0000	1,2661	-0,58779	0,809016	0

PESO	200	N3	-142,6551	Nodo D (vettore termini noti)			
αx	0	αx	-0,587787	-83,85076			
αy	0	αy	0,8090161	115,41029			
αz	-1	αz	0	200			
	N4:	-83,85076	0,4518128	0,4518128			
		115,41029	0,7110048	-0,711005			
		200	-0,53883	-0,53883	DET_NUM	-64,24821	
					Det_den	0,4503744	
					N4:	-142,6551	
	N11:	-0,587787	-83,85076	0,4518128			
		-0,809016	115,41029	-0,711005			
		0	200	-0,53883	DET_NUM	-83,5838	
					Det_den	0,4503744	
					N11:	-185,5874	
	N12:	-0,587787	0,4518128	-83,85076			
		-0,809016	0,7110048	115,41029			
		0	-0,53883	200	DET_NUM	-83,5838	
					Det_den	0,4503744	
					N12:	-185,5874	

NODO E						COSENI DIRETTORI		
Asta	Nodi	Δx	Δy	Δz	Lunghezza	αx	αy	αz
13	EI	1,6679	-0,4293	-1,1016	2,0444	0,815825	-0,20998	-0,53883
14	EJ	-1,0970	-1,3276	-1,1016	2,0444	-0,5366	-0,64939	-0,53885
15*	EF	-2,8058	1,0243	-1,1016	3,1836	-0,88133	0,321744	-0,34602
4	ED	0,7442	1,0243	0,0000	1,2661	0,587787	0,809016	0
5	EA	-1,2041	0,3912	0,0000	1,2661	-0,95106	0,308991	0

PESO	200	N4	-142,6551	N5	-142,65	Nodo E (vettore termini noti)		
αx	0	αx	0,5877865	αx	-0,95106	-51,81899		
αy	0	αy	0,8090161	αy	0,308991	159,48803		
αz	-1	αz	0	αz	0	200		
	N13:	-51,81899	-0,536595	-0,881333				
		159,48803	-0,649393	0,321744				
		200	-0,538845	-0,346025	DET_NUM	-123,4952		
					Det_den	0,6654426		
					N13:	-185,5836		
	N14:	0,8158247	-51,81899	-0,881333				
		-0,209985	159,48803	0,321744				
		-0,538829	200	-0,346025	DET_NUM	-123,4969		
					Det_den	0,6654426		
					N14:	-185,5861		
	N15*:	0,8158247	-0,536595	-51,81899				
		-0,209985	-0,649393	159,48803				
		-0,538829	-0,538845	200	DET_NUM	-4,14E-14		
					Det_den	0,6654426		
					N15*:	-6,23E-14		

Chiaramente il valore dell'asta fittizia non è precisamente 0 ma lo è per approssimazione.

Per il calcolo delle aste che confluiscono nei nodi al livello 1 vale a dire F,G,H,I,J abbiamo usato lo stesso procedimento sopprimendo l'asta 30 FO e creando un'asta fittizia 30* KJ in modo da ripristinare il numero di aste. Il procedimento di soluzione è lo stesso visto prima.

Livello	Nodo	X	Y	Z	PX	PY	PZ
2	A	-0,8713	-0,6331	2,8000	0,00	0,00	-200,00
2	B	-0,8713	0,6331	2,8000	0,00	0,00	-200,00
2	C	0,3328	1,0243	2,8000	0,00	0,00	-200,00
2	D	1,0770	0,0000	2,8000	0,00	0,00	-200,00
2	E	0,3328	-1,0243	2,8000	0,00	0,00	-200,00
1	F	-2,4730	0,0000	1,6984	0,00	0,00	0,00
1	G	-0,7642	2,3519	1,6984	0,00	0,00	0,00
1	H	2,0007	1,4536	1,6984	0,00	0,00	0,00
1	I	2,0007	-1,4536	1,6984	0,00	0,00	0,00
1	J	-0,7642	-2,3519	1,6984	0,00	0,00	0,00
0	K	-2,4271	1,7634	0,0000	0,00	0,00	0,00
0	L	0,9271	2,8532	0,0000	0,00	0,00	0,00
0	M	3,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00
0	N	0,9271	-2,8532	0,0000	0,00	0,00	0,00
0	O	-2,4271	-1,7634	0,0000	0,00	0,00	0,00

NODO F					COSENI DIRETTORI			
Asta	Nodi	Δx	Δy	Δz	Lunghezza	αx	αy	αz
16	FG	1,7088	2,3519	0,0000	2,9071	0,587795	0,80901	0
20	FJ	1,7088	-2,3519	0,0000	2,9071	0,587795	-0,80901	0
21	FK	0,0459	1,7634	-1,6984	2,4487	0,018744	0,72013	-0,69359
6	FA	1,6017	-0,6331	1,1016	2,0445	0,783438	-0,30967	0,538824
7	FB	1,6017	0,6331	1,1016	2,0445	0,783438	0,309667	0,538824
X2	FO	0,0459	-1,7634	-1,6984	2,4487	0,018744	-0,72013	-0,69359

X2	-144,173	N6	-185,5825	N7	-185,583	Nodo F (vettore termini noti)		
αx	0,018744	αx	0,7834376	αx	0,783438	293,48711		
αy	-0,72013	αy	-0,309667	αy	0,309667	-103,8234		
αz	-0,69359	αz	0,5388243	αz	0,538824	99,996374		
	N16:	293,48711	0,5877953	0,0187445				
		-103,8234	-0,80901	0,7201302				
		99,996374	0	-0,693586	DET_NUM	166,19717		
					det_den	0,6596446		
					N16:	251,94958		
	N20:	0,5877953	293,48711	0,0187445				
		0,8090097	-103,8234	0,7201302				
		0	99,996374	-0,693586	DET_NUM	166,19717		
					det_den	0,6596446		
					N20:	251,94958		
	N21	0,5877953	0,5877953	293,48711				
		0,8090097	-0,80901	-103,8234				
		0	0	99,996374	DET_NUM	-95,10297		
					det_den	0,6596446		
					N21:	-144,1731		

NODO G						COSENI DIRETTORI		
Asta	Nodi	Δx	Δy	Δz	Lunghezza	αx	αy	αz
17	GH	2,7649	-0,8983	0,0000	2,9072	0,951064	-0,309	0
22	GK	-1,6629	-0,5885	-1,6984	2,4487	-0,6791	-0,24033	-0,69359
23	GL	1,6913	0,5013	-1,6984	2,4487	0,69068	0,204717	-0,69358
8	GB	-0,1071	-1,7188	1,1016	2,0443	-0,05239	-0,84077	0,538857
9	GC	1,0970	-1,3276	1,1016	2,0444	0,536595	-0,64939	0,538845
16	GF	-1,7088	-2,3519	0,0000	2,9071	-0,5878	-0,80901	0

N8	-185,585	N9	-185,5861	N16	251,9496	NODO G (vettore termini noti)		
αx	-0,05239	αx	0,5365953	αx	-0,5878	237,95686		
αy	-0,84077	αy	-0,649393	αy	-0,80901	-72,72192		
αz	0,538857	αz	0,5388454	αz	0	200,00587		
	N17:	237,95686	-0,679095	0,6906799				
		-72,72192	-0,240332	0,204717				
		200,00587	-0,693593	-0,693579	DET_NUM	147,93642		
					det_den	0,5871364		
					N17:	251,96261		
	N22:	0,9510636	237,95686	0,6906799				
		-0,308995	-72,72192	0,204717				
		0	200,00587	-0,693579	DET_NUM	-84,65251		
					det_den	0,5871364		
					N22:	-144,1786		
	N23:	0,9510636	-0,679095	237,95686				
		-0,308995	-0,240332	-72,72192				
		0	-0,693593	200,00587	DET_NUM	-84,65705		
					det_den	0,5871364		
					N23:	-144,1863		

NODO H					COSENI DIRETTORI			
ASTA	Nodi	Δx	Δy	Δz	Lunghezza	αx	αy	αz
18	HI	0,0000	-2,9072	0,0000	2,9072	0	-1	0
24	HL	-1,0736	1,3996	-1,6984	2,4487	-0,43844	0,571572	-0,6936
25	HM	0,9993	-1,4536	-1,6984	2,4487	0,408095	-0,59362	-0,69359
10	HC	-1,6679	-0,4293	1,1016	2,0444	-0,81582	-0,20998	0,538829
11	HD	-0,9237	-1,4536	1,1016	2,0444	-0,45181	-0,711	0,53883
17	HG	-2,7649	0,8983	0,0000	2,9072	-0,95106	0,308995	0

N10	-185,584	N11	-185,5874	N17	251,9626	NODO H (vettore termini noti)		
	-0,81582		-0,451813		-0,95106	4,3780662		
	-0,20998		-0,711005		0,308995	-248,7784		
	0,538829		0,5388297		0	199,99776		
	N18:	4,3780662	-0,438439	0,4080946				
		-248,7784	0,571572	-0,593622				
		199,99776	-0,693597	-0,693593	DET_NUM	147,93474		
					det_den	0,5871517		
					N18:	251,95318		
	N24:	0	4,3780662	0,4080946				
		-1	-248,7784	-0,593622				
		0	199,99776	-0,693593	DET_NUM	-84,65461		
					det_den	0,5871517		
					N24:	-144,1784		
	N25:	0	-0,438439	4,3780662				
		-1	0,571572	-248,7784				
		0	-0,693597	199,99776	DET_NUM	-84,65028		
					det_den	0,5871517		
					N25:	-144,171		

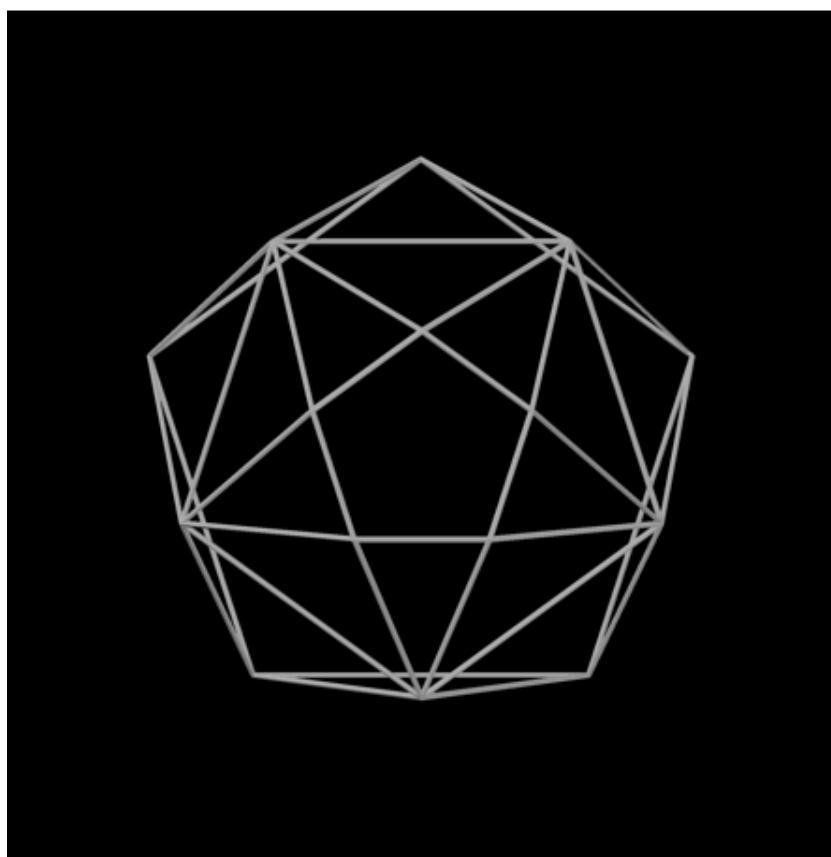
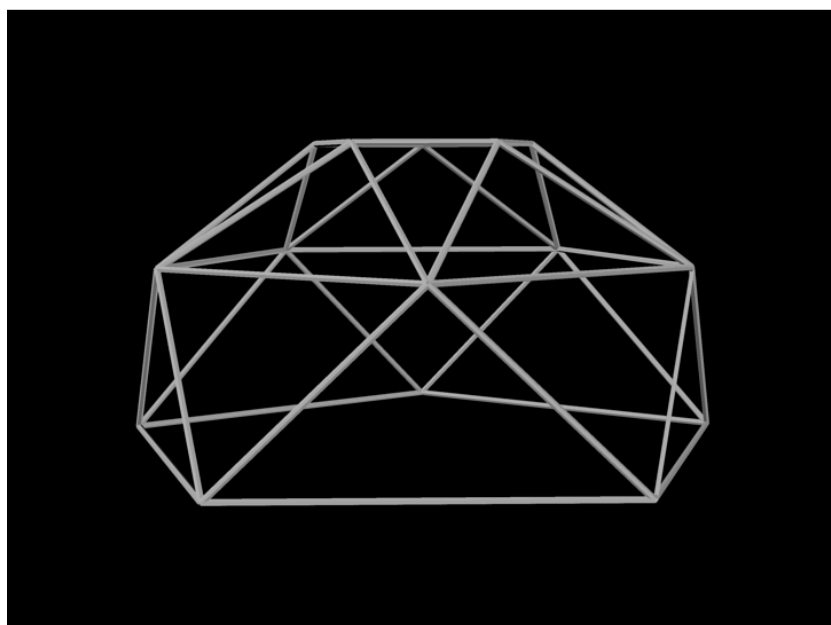
NODO I						COSENI DIRETTORI		
ASTA	Nodi	Δx	Δy	Δz	Lunghezza	αx	αy	αz
19	IJ	-2,7649	-0,8983	0,0000	2,9072	-0,95106	-0,309	0
26	IM	0,9993	1,4536	-1,6984	2,4487	0,408095	0,593622	-0,69359
27	IN	-1,0736	-1,3996	-1,6984	2,4487	-0,43844	-0,57157	-0,6936
12	ID	-0,9237	1,4536	1,1016	2,0444	-0,45181	0,711005	0,53883
13	IE	-1,6679	0,4293	1,1016	2,0444	-0,81582	0,209985	0,538829
18	IH	0,0000	2,9072	0,0000	2,9072	0	1	0

N12	-185,587	N13	-185,5836	N18	251,9532	NODO I (vettore termini noti)		
	-0,4518		-0,815825		0	-235,2544		
	0,711005		0,2099847		1	-81,02994		
	0,53883		0,5388288		0	199,99776		
	N19:	-235,2544	0,4080946	-0,438439				
		-81,02994	0,5936219	-0,571572				
		199,99776	-0,693593	-0,693597	DET_NUM	147,95162		
					det_den	0,5871967		
					N19:	251,96261		
	N26:	-0,951064	-235,2544	-0,438439				
		-0,308995	-81,02994	-0,571572				
		0	199,99776	-0,693597	DET_NUM	-84,65676		
					det_den	0,5871967		
					N26:	-144,171		
	N27:	-0,951064	0,4080946	-235,2544				
		-0,308995	0,5936219	-81,02994				
		0	-0,693593	199,99776	DET_NUM	-84,6611		
					det_den	0,5871967		
					N27:	-144,1784		

NODO J		COSENI DIRETTORI						
ASTA	Nodi	Δx	Δy	Δz	Lunghezza	αx	αy	αz
28	JN	1,6913	-0,5013	-1,6984	2,4487	0,69068	-0,20472	-0,69358
29	JO	-1,6629	0,5885	-1,6984	2,4487	-0,6791	0,240332	-0,69359
30*	JK	-1,6629	4,1153	-1,6984	4,7524	-0,34991	0,865938	-0,35738
14	JE	1,0970	1,3276	1,1016	2,0444	0,536595	0,649393	0,538845
15	JA	-0,1071	1,7188	1,1016	2,0443	-0,05239	0,840766	0,538857
19	JI	2,7649	0,8983	0,0000	2,9072	0,951064	0,308995	0
20	JF	-1,7088	2,3519	0,0000	2,9071	-0,5878	0,80901	0

								NODO J (vettore termini noti)
N14	-185,586	N15	-185,5846	N19	251,9626	N20	251,9496	
	0,5366		-0,052389		0,951064		-0,5878	-1,67562
	0,649393		0,8407663		0,308995		0,80901	-5,13329
	0,538845		0,5388575		0		0	200,0059
	N28:	-1,675621	-0,679095	-0,349906				
		-5,133287	0,2403316	0,8659378				
		200,00587	-0,693593	-0,357376	DET_NUM	-101,6576		
					det_den	0,7050429		
					N28:	-144,1863		
	N29:	0,691	-1,676	-0,350				
		-0,205	-5,133	0,866				
		-0,694	200,006	-0,357	DET_NUM	-101,6521		
					det_den	0,7050429		
					N29:	-144,1786		
	N30*	0,691	-0,679	-1,676				
		-0,205	0,240	-5,133				
		-0,694	-0,694	200,006	DET_NUM	-1,08E-13		
					det_den	0,7050429		
					N30*	-1,53E-13		

Infine le aste al livello 0 che uniscono i nodi K,L,M,N,O sono scariche in quanto collegano nodi vincolati. Sarebbero state cariche qualora considerassimo sulle aste il peso distribuito di pannelli di copertura etc. Ma nelle nostre ipotesi abbiamo solo carichi concentrati nei nodi in alto.



Nelle due immagini sono rappresentate una vista frontale e dall'alto della cupola a rete pentagonale analizzata con il metodo Henneberg.

BIBLIOGRAFIA

1. BELLUZZI Odone (1966): "Scienza delle costruzioni" vol. II.

RINGRAZIAMENTI

Alla fine di questa tesi mi sembra doveroso ringraziare tutti coloro che hanno contribuito affinché io potessi dare il massimo per la stesura di questo lavoro. In particolare vorrei ringraziare i miei genitori, Antonio ed Anna, i miei fratelli Carmine, Mario ed Eleonora, che seppur distanti sono sempre vicini a me. Un grazie va ai miei nonni, i miei zii, i miei cugini, ai miei amici di sempre, ai miei colleghi, i quali mi hanno spronato a dare il massimo semplicemente con il loro essere.

Volevo ringraziare anche la mia ragazza, Adriana, la quale non ha mai smesso di starmi vicino.

Infine ringrazio il mio relatore, il Prof. Ing. Paolo Sebastiano Valvo, per avermi dato la possibilità di approfondire un argomento che mi è interessato dagli studi della Scienza delle Costruzioni e per il supporto che mi ha dato per il lavoro svolto con grande dedizione.

A Rosanna, Bruno, Carmine, Mario, Eleonora e ai miei nonni.

L'immaginazione è più importante della conoscenza. La conoscenza è limitata. L'immaginazione abbraccia il mondo, stimolando il progresso, facendo nascere l'evoluzione.

Albert Einstein